Att komma fram till täthetsfunktionen för Gammafördelningen; ett exempel där $\alpha = 3$

Vi hade följande exempel

Antag att det förekommer skador på koppartråd; med i genomsnitt λ skador per meter.

Bestäm sannolikheten för att det "dröjer" mindre än y meter tills den **tredje** skadan kommer.

Då har vi $Y \sim Gamma\ (\alpha = 3,\ \beta = \frac{1}{\lambda})$

$F(y) = P(Y \le y) = 1 - P(X < 3)$ för $X \sim Po\ (\lambda \cdot y)$

$$F(y) = 1 - P(X < 3) = 1 - \big(P(0) + P(1) + P(2)\big) = 1 - \left(\frac{(\lambda y)^0 \cdot e^{-\lambda y}}{0!} + \frac{(\lambda y)^1 \cdot e^{-\lambda y}}{1!} + \frac{(\lambda y)^2 \cdot e^{-\lambda y}}{2!} \right)$$

$$= 1 - \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda y)^k \cdot e^{-\lambda y}}{k!} \right)$$

Derivera $F(y)$ för att få $f(y)$:

$$F(y) = 1 - \left(\frac{(\lambda y)^0 \cdot e^{-\lambda y}}{0!} + \frac{(\lambda y)^1 \cdot e^{-\lambda y}}{1!} + \frac{(\lambda y)^2 \cdot e^{-\lambda y}}{2!} \right) = 1 - \left(e^{-\lambda y} + \lambda y \cdot e^{-\lambda y} + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 y^2 \cdot e^{-\lambda y} \right)$$

ger $$F'(y) = 0 - \left(-\lambda e^{-\lambda y} + \big(\lambda \cdot e^{-\lambda y} + \lambda y \cdot (-\lambda e^{-\lambda y})\big) + \frac{1}{2} \cdot \big(2\lambda^2 y \cdot e^{-\lambda y} + \lambda^2 y^2 \cdot (-\lambda e^{-\lambda y})\big) \right)$$

$$= 0 \quad + \lambda e^{-\lambda y} \quad - \lambda \cdot e^{-\lambda y} + \quad \lambda^2 y e^{-\lambda y} \quad - \frac{1}{2} \cdot 2\lambda^2 y \cdot e^{-\lambda y} \quad + \frac{1}{2} \lambda^3 y^2 \cdot e^{-\lambda y}$$

$$= 0 \quad + \quad \lambda e^{-\lambda y} - \lambda \cdot e^{-\lambda y} + \quad \lambda^2 y e^{-\lambda y} \quad - \lambda^2 y \cdot e^{-\lambda y} \quad + \quad \frac{1}{2} \lambda^3 y^2 \cdot e^{-\lambda y}$$

$$= \quad \frac{1}{2} \lambda^3 y^2 \cdot e^{-\lambda y}$$

Alltså:

$$f(y) = \quad \frac{1}{2} \lambda^3 y^2 \cdot e^{-\lambda y}$$